Radioprotection Cirkus – 89 D boulevard du Fier 74000 Annecy – www.rpcirkus.org - contact@rpcirkus.org
Association loi 1901 créée le 9 mars 2010 – n° W913002355 - Enregistrée à la préfecture de la Haute Savoie

Titre :	Statistiques appliquées SD et LD
N° Chrono :	DOC-FO-15_2
Auteurs :	Marc AMMERICH
Editeur :	domino
Commentaires Editeur :	Les notions de seuil de décision et limite de détection posent généralement le plus de problèmes et le plus de questions. Après avoir suivi une session de formation animée par Alain VIVIER de l'INSTN sur ces sujets, je préciserai ces points en fin de document.

Sommaire

1. Résultats de la mesure d'un nombre d'impulsions

- *Vous avez mesuré N = 40 162 impulsions.*

*Quel est **l'intervalle de confiance** dans lequel vous allez trouver la valeur moyenne pour une probabilité de 99.7 % ?*

N = 40 162 d'où

$\varepsilon_N = k \cdot \sqrt{N}$ soit $\varepsilon_N = 3 \cdot \sqrt{N}$ pour une probabilité de 99.7 %.

$\varepsilon_N = 3 \cdot \sqrt{40162} = 3 \cdot 200{,}4 = 601$

Donc la valeur moyenne se situe dans l'intervalle 40 162 $\pm$ 601

L'incertitude relative est égale à :

$$\frac{\varepsilon_N}{N} = 3 \cdot \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{3}{\sqrt{N}} = \frac{3}{200{,}1} = 1{,}5\ \%$$

- *Combien faut-il compter d'impulsions pour obtenir une incertitude relative de 5 % (dans un intervalle de confiance de 3 σ)*

$\varepsilon_N = 3 \cdot \sigma = 3 \cdot \sqrt{N}$ pour 99.7 % d'où

$$\frac{\varepsilon_N}{N} = 3 \cdot \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{3}{\sqrt{N}} = 0.05 = \frac{5}{100}$$

Ce qui donne

$\sqrt{N} = \dfrac{3}{0.05} = 60$ d'où N = 3 600

- *Combien faut-il compter d'impulsions pour obtenir une incertitude relative de 2 % avec un intervalle de confiance de 99,7 %*

pour 99,7 % $\varepsilon_N = 3 \cdot \sigma = 3 \cdot \sqrt{N}$ d'où

$$\frac{\varepsilon_N}{N} = 3 \cdot \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{3}{\sqrt{N}} = 0.02 = \frac{3}{100}$$

Ce qui donne

$\sqrt{N} = \dfrac{3}{0.02} = 150$ d'où N = 22 500 impulsions

2. Résultats de la mesure d'un taux de comptage

- *Le **résultat brut** d'une mesure effectuée pendant 10 minutes est N = 23 450 impulsions. Calculer le taux de comptage exprimé en impulsions par minutes et l'incertitude absolue qui lui est associée. On prendra une probabilité de 95.5 %.*

n = 23 450 / 10 = 2345 imp.min^{-1}

$\varepsilon_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{n}{t}}$ puisque k = 2 pour une probabilité de 95.5 %

$\varepsilon_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{2345}{10}} = 2 \cdot 15{,}31 = 30{,}6 = 31$ imp.min^{-1}

D'où

$$n = 2345 \pm 31 \text{ mp.min}^{-1}$$

Il y a donc 95.5 chances sur 100 pour que $\bar{n}$ recherché soit dans l'intervalle :

2314 - 2376 imp.min^{-1}

L'incertitude relative est égale à 1,32 %

- *Imaginons qu'au lieu de 10 minutes, le temps de comptage ait été de 1 minute. Pour plus de commodité, reprenons le taux de comptage égal à*
  n = 23 450 / 10 = 2345 imp.min^{-1}

$\varepsilon_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{2345}{1}} = 2 \cdot 15{,}31 = 96{,}9 = 97$ imp.min^{-1}

D'où

$$n = 2345 \pm 97 \text{ mp.min}^{-1}$$

Le temps de comptage est un facteur déterminant dans la précision des mesures.

- *Quelle est la valeur du taux de comptage donnant une incertitude relative de 1 % pour un intervalle de confiance de 99.7 % et un temps de comptage de 1 minute ?*

$\frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{3}{\sqrt{N}}$ puisque l'intervalle de confiance est de 3σ.

D'où $\sqrt{N}$ = 3 / 0.01 = 300 et donc N = 90 000 impulsions.

D'où n = N / t et donc n = 90 000 / 60 = 1500 imp.s^{-1}

2.1 Résultats de plusieurs mesures d'un taux de comptage

Supposons que l'on fasse 5 mesures d'un même échantillon sur 100 secondes.
On obtient les résultats suivants :

n1 = 123,41 imps /s (N = 12341 imp)
n2 = 124,59 imps /s (N = 12459 imp)
n3 = 122,88 imps /s (N = 12288 imp)
n4 = 125,33 imps /s (N = 12533 imp)
n5 = 123,50 imps /s (N = 12350 imp)

- *Quelle est la valeur de l'incertitude absolue sur la valeur moyenne de la mesure ,*

n moy = 123,94 imp/s

On peut utiliser la formule où n est égal au nombre de mesures:

$$\varepsilon(v) = \frac{\sqrt{\sum_1^n (V - V_{moy})^2}}{n-1}$$

Ce qui fait que l'incertitude absolue est égale à 0,99 imp/s

Quelle est alors la valeur de l'incertitude relative

$$\frac{\varepsilon(v)}{v} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_1^n (V - V_{moy})^2}}{V_{moy}} \times 100$$

L'incertitude relative est égale à 0,8 %

2.2 Expression de l'incertitude associée à la détermination d'un taux de comptage net

Taux de comptage brut avec la correction du mouvement propre

- *On a obtenu les résultats suivants :*

Nombre d'impulsions "brut" N_{brut} *= 23 400 imp - temps de comptage* t_{brut} *= 10 minutes*
Nombre d'impulsions "bruit de fond" N_{bdf} *= 1 615 imp - temps de comptage* t_{bdf} *= 5 minutes*
Quelle est la valeur du taux de comptage et l'incertitude absolue qui lui est associée, pour un intervalle de confiance de 99.7 % ?

n_{brut} = 23 400 / 10 = 2340 imp.min^{-1}
n_{bdf} = 1 615 / 5 = 323 imp.min^{-1}
D'où n_{net} = 2340 - 323 = 2017 imp.min^{-1}

$$\varepsilon_{nbrut} = k \,.\, \sigma_{nbrut} = 3 \,.\, \sqrt{\frac{n_{brut}}{t}} \quad \text{d'où} \quad \varepsilon(n_{brut}) = 3 \,.\, \sqrt{\frac{2340}{10}} = 46 \text{ imp.min}^{-1}$$

$$\varepsilon_{nbdf} = k \,.\, \sigma_{nbdf} = 3 \,.\, \sqrt{\frac{n_{mp}}{t}} \quad \text{d'où} \quad \varepsilon(n_{bdf}) = 3 \,.\, \sqrt{\frac{323}{5}} = 24 \text{ imp.min}^{-1}$$

$$\varepsilon_{nnet} = \sqrt{\varepsilon_{nbrut}^{\ 2} + \varepsilon_{nbdf}^{\ 2}} = \sqrt{(46)^2 + (24)^2} = 52 \text{ imp.min}^{-1}$$

Donc $n_{net} = 2017 \pm 52$ imp.min^{-1}

L'incertitude relative sera égale à 2,6 %.

2.3 Mélange des incertitudes

Pour illustrer ce chapitre, ainsi que les précédents, nous allons choisir un exemple relativement simple mêlant différentes incertitudes.

Le volume sanguin V d'un individu s'obtient à partir de la relation :

$$\frac{V}{n} = \frac{\Delta V}{n'}$$

où : n correspond au taux de comptage de l'activité injectée au patient
ΔV correspond au volume de sang prélevé
n' correspond au taux de comptage de l'échantillon prélevé.

n et n' peuvent se décomposer de la façon suivante :

$n = n_1 - n_2$
où : n_1 est le taux de comptage de la seringue contenant la source avant injection au patient.
n_2 est le taux de comptage de la seringue après injection au patient.
Dans le cas présent on néglige le bruit de fond de l'installation.

$n' = n_s - n_{bdf}$
où : n_s est le taux de comptage de la seringue après prélèvement du volume ΔV.
n_{bdf} est le taux de comptage du bruit de fond de l'installation.

Les sources d'erreurs sont celles liées au caractère aléatoire de la radioactivité et celles liées à l'utilisation du matériel.

La pratique a montré que le volume de l'échantillon prélevé était de 5 ml avec une incertitude relative de 5 %.

On a obtenu les résultats suivants :

N_1 = 107 050 impulsions pendant t_1 = 1 minute
N_2 = 2 120 impulsions pendant t_2 = 2 minutes
N_s = 3 750 impulsions pendant t_s = 30 minutes
N_{bdf} = 900 impulsions pendant t_{bdf} = 45 minutes

On va donc avoir l'incertitude relative sur le volume sanguin V donnée par :

$$\left(\frac{\varepsilon_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_{\Delta V}}{\Delta V}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{n'}}{n'}\right)^2$$

2.3.1 Calculs et erreurs associées sur n

n_1 = 107 050 imp.min^{-1}
n_2 = 2 120 / 2 = 1 060 imp.min^{-1}

$$n = 107\,050 - 1\,060 = 105\,990 \text{ imp.min}^{-1}$$

Les taux de comptage n_1 et n_2 sont indépendants l'un de l'autre. on peut donc écrire dans un premier temps :

$$\varepsilon_n^2 = \varepsilon_{n1}^2 + \varepsilon_{n2}^2$$

En prenant l'intervalle de confiance maximum (99.7 %) soit 3 σ on écrit que :

$\varepsilon_n = 3 \, . \sqrt{\frac{n}{t}}$ d'où

$\varepsilon_{n1}^2 = 9 \, . \, n_1 / t_1$
$\varepsilon_{n2}^2 = 9 \, . \, n_2 / t_2$

$$\varepsilon_n^2 = 9 \, . \, \frac{107\ 050}{1} + 9 \, . \, \frac{1060}{2} = 968\,220$$

$$\frac{\varepsilon_n^2}{n^2} = \frac{968\,220}{(105990)^2} = 8{,}61.10^{-5}$$

2.3.2 Calculs et erreurs associées sur n'

n_s = 3 750 / 30 = 125 imp.min^{-1}
n_{bdf} = 900 / 45 = 20 imp.min^{-1}

n' = 125 - 20 = 105 imp.min^{-1}

Les taux de comptage n_s et n_{bdf} sont indépendants l'un de l'autre. on peut donc écrire dans un premier temps :

$$\varepsilon_{n'}^2 = \varepsilon_{ns}^2 + \varepsilon_{nbdf}^2$$

En prenant l'intervalle de confiance maximum (99.7 %) soit 3 σ on écrit que :

$\varepsilon_n = 3 \, . \sqrt{\frac{n}{t}}$ d'où

$\varepsilon_{ns}^2 = 9 \, . \, n_s / t_s$
$\varepsilon_{nbdf}^2 = 9 \, . \, n_{bdf} / t_{bdf}$

$$\varepsilon_{n'}^2 = 9 \, . \, \frac{125}{30} + 9 \, . \, \frac{20}{45} = 41{,}5$$

$$\frac{\varepsilon_{n'}^{2}}{n'^{2}} = \frac{41.5}{(105)^{2}} = 3{,}76.10^{-3}$$

2.3.3. Calculs et erreurs associées sur ΔV

On a donc $\varepsilon_{\Delta V} / \Delta V = 5\ \%$

$$\frac{\varepsilon_{\Delta V}^{2}}{\Delta V^{2}} = 2{,}5.10^{-3}$$

2.3.4.Résultat final pour le volume sanguin V

$$\frac{V}{n} = \frac{\Delta V}{n'} \text{ d'où } V = \frac{\Delta V \times n}{n'}$$

$V = 5.10^{-3} \times 105\,990 / 105 = 5{,}05$ litres

On va donc exprimer le volume en fonction de V et de εV

$$\left(\frac{\varepsilon_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_{\Delta V}}{\Delta V}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{n'}}{n'}\right)^2$$

d'où

$$\left(\frac{\varepsilon_V}{V}\right)^2 = 8{,}61.10^{-5} + 3{,}76.10^{-3} + 2{,}5.10^{-3}$$

d'où $\varepsilon_V = 0{,}40$ litres et donc

V = 5,05 ± 0,40 litres

3.Seuil de décision et limite de détection

3.1 seuil de décision

Dans le cas où la mesure du bruit de fond et celle de l'échantillon sont proches :

La question qui se pose est : L'échantillon que je mesure est-il radioactif ?
C'est l'objectif du seuil de décision que de répondre à cette question.

Partir des hypothèses suivantes :
Une mesure de bruite de fond : N_{BDF}
Une mesure de l'échantillon : N_{BRUT}

On prend également l'hypothèse où les temps de comptage du bruit de fond et de l'échantillon sont les mêmes.

Et donc $N_{NET} = N_{BRUT} - N_{BDF}$

$$\varepsilon_{Nnet} = \sqrt{\varepsilon_{Nbrut}^{2} + \varepsilon_{Nbdf}^{2}}$$

Dans le cas d'un intervalle de confiance égal à 68 %

$$\varepsilon_{Nnet} = \sqrt{N_{BRUT} + N_{BDF}} = \sqrt{N_{NET} + N_{BDF} + N_{BDF}} = \sqrt{N_{NET} + 2\,N_{BDF}}$$

exemple

N_{BDF} = 120 impulsions
N_{BRUT} = 134 impulsions

$$\varepsilon_{Nnet} = \sqrt{14 + 2\,.\,120} = 16$$

$N_{NET} = 14 \pm 16$
Le résultat est donc parlant

On construit un intervalle appelé intervalle de risque α.
La détermination de SD en fonction de la valeur α s'appuie sur la propriété des intervalles de confiance. On prend des valeurs particulières pour alpha.

La valeur de SD se détermine avec la formule :

$$\boxed{SD = k_{1-\alpha} \times \sqrt{2\,(BDF + 1)}}$$

Pour un intervalle de confiance de 90 % (α = 5%) $k_{1-\alpha} = 1{,}65$
Pour un intervalle de confiance de 95 % (α = 2,5%) $k_{1-\alpha} = 1{,}96$ (on prend souvent k = 2)
Pour un intervalle de confiance de 99,7 % (α = 0,135%) $k_{1-\alpha} = 3$

exemple :

N_{BDF} = 124 impulsions
N_{BRUT} = 163 impulsions

En prenant un intervalle de confiance de 90 %

$$SD = 1{,}65 \times \sqrt{2\,(124 + 1)} = 26$$

En prenant un intervalle de confiance de 95 %

$$SD = 2 \times \sqrt{2\,(124 + 1)} = 32$$

Nous pouvons considérer cette mesure comme significative et exprimer le résultat :

Mesure supérieure au seuil de décision calculé pour un risque α de 5 % : $N_{NET} = 39 \pm 26$
ou
Mesure supérieure au seuil de décision calculé pour un risque α de 2,5 % : $N_{NET} = 39 \pm 32$

Deux interprétations sont possibles sur ce seuil de décision

Interprétation statistique : Si l'on mesure n échantillons non radioactifs α % d'entre eux seulement généreront une valeur nette supérieure à SD.
Exemple : 5% d'entre eux auront une valeur nette supérieure à 65, soit une mesure brute supérieure à 189

Interprétation probabiliste : on a α % de chance d'obtenir a priori une valeur supérieure à SD si l'on mesure un échantillon réellement non radioactif.
Exemple : on a 5% de chance d'obtenir une valeur supérieure à 65, soit une mesure brute supérieure à 189, si l'on mesure un échantillon réellement non radioactif.

3.2. Limite de détection

La détermination de LD en fonction de intervalle de risque β correspond à la formule (si les risques α et β sont les mêmes) :

$$LD = (k_{1-\beta})^2 + 2 \times SD$$

Pour un intervalle de confiance de 90 % ($\alpha = \beta = 5\%$) $k_{1-\beta} = 1,65$
LD = 2,7 + 2 x SD

Pour un intervalle de confiance de 95 % ($\alpha = \beta = 2,5\%$) $k_{1-\beta} = 2$
LD = 4 + 2 x SD

LD = 2 SD pour des valeurs de comptages élevées.

En reprenant l'exemple précédent :
En prenant un intervalle de confiance de 90 %
SD = 26
LD = 2,7 + 52 = 54,7

En prenant un intervalle de confiance de 95 %
SD = 32
LD = 4 + 64 = 68

En supposant une valeur de SD = 1000 on constate bien que LD = 2 SD

En reprenant aussi les deux interprétations possibles :

Interprétation statistique : Si l'on mesure n échantillons radioactifs de moyenne vraie égale à la limite de détection LD, β % d'entre eux seulement généreront une valeur nette inférieure à SD.
Exemple : la limite de détection est de 54,7, 5% des échantillons auront une valeur nette inférieure à 26.

Interprétation probabiliste : on a β % de chance d'obtenir a priori une valeur inférieure à SD si l'on mesure un échantillon radioactif de moyenne vraie égale à LD.
Exemple : on a 5% de chance d'obtenir une valeur inférieure à 26, si l'on mesure un échantillon radioactif de moyenne vraie égale à 54,7.

La limite de détection doit être comprise non pas comme une limite de détection minimale, au sens où l'on ne pourrait pas détecter de valeurs plus basses, mais bel et bien comme une « limite maximale de non détection » au sens où, à partir de cette valeur et au-delà, la probabilité de détection est très élevée et à l'inverse, la probabilité de non détection très faible.

3.3 Seuil de décision – cas où les temps de mesure sont différents

On prend maintenant l'hypothèse où les temps de comptage du bruit de fond et de l'échantillon sont différents.

Soit :
T_{BDF} le temps de mesure du bruit de fond
BDF la valeur du comptage unique du bruit de fond pendant le temps T_{BDF}
T_S le temps de mesure de l'échantillon
n le rapport $\dfrac{T_{BDF}}{T_S}$
La valeur du seuil de décision s'exprime alors, pour une valeur de comptage suffisament élevée :

$$SD = k_{1-\alpha} \times \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right) \times \left(\overline{BDF}\right)}$$

Reprenons l'exemple

N_{BDF} = 124 impulsions
N_{BRUT} = 163 impulsions

En prenant un intervalle de confiance de 90 %

$$SD = 1,65 \times \sqrt{2\,(124+1)} = 26$$

Si on accorde un temps de comptage du bruit de fond supérieur à celui de l'échantillon par exemple $T_{BDF} = 5 \times T_S$, avec le $\overline{BDF}$ = 124. On suppose que la valeur de 124 correspond à cette valeur moyenne.

$$SD = 1{,}65 \times \sqrt{\left(1+\frac{1}{5}\right) \times 124} = 20$$

3.4 Optimisation des temps de comptages

Le problème que l'on peut poser alors est celui de l'optimisation du temps T_{BDF} accordé à la mesure du bruit de fond et le temps T_S accordé à la mesure de ou des échantillons sous la contrainte d'un temps disponible total déterminée T_{TOTAL}.

Considérons le cas général où l'on doit mesurer k échantillons, k étant un nombre déterminé.

$T_{BDF} + k \times T_S = T_{TOTAL}$
et
$T_{BDF} = n \times T_S$

On obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} T_S \text{ optimum} = \dfrac{1}{\sqrt{k} + k} \times T_{TOTAL} \\ T_{BDF} \text{ optimum} = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + k} \times T_{TOTAL} \end{cases}$$

Applications numériques
Si k = 1
$T_{BDF} = 0{,}5 \times T_{TOTAL}$ (50%)
$T_S = 0{,}5 \times T_{TOTAL}$ (50%)
Et n = 1

Si k = 5
$T_{BDF} = 0{,}309 \times T_{TOTAL}$ (30,9%)
$T_S = 0{,}138 \times T_{TOTAL}$ (13,8 % chacun)
Et n = 2,2

Si k = 10
$T_{BDF} = 0{,}24 \times T_{TOTAL}$ (24%)
$T_S = 0{,}076 \times T_{TOTAL}$ (7,6 % chacun)
Et n = 3,2

Si k = 20
$T_{BDF} = 0{,}183 \times T_{TOTAL}$ (18,3%)
$T_S = 0{,}041 \times T_{TOTAL}$ (4,1 % chacun)
Et n = 4,5

On ne prendra pas de valeur de n supérieure à 10. On ciblera trois dans la mesure du possible.

3.5.Paramètres influençant le seuil de décision

Baisser le comptage du bruit de fond et le taux de comptage du bruit de fond

Augmenter le temps de comptage de l'échantillon (pour savoir s'il est radioactif ou pas)

Augmenter le temps de comptage du bruit de fond T_{BDF} par rapport au temps de compatge de l'échantillon T_S en arrivant à un optimum de $T_{BDF} = T_S$ quand le temps est contraint.
Plus s'il n'y a pas de contrainte de temps

Augmenter le risque α

3.6.Formules dérivées à partir du seuil de décision

Si l'on cherche le seuil de décision pour un taux de comptage d'un échantillon on peut écrire :

$$\text{SD} = k_{1-\alpha} \times \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right) \times \left(\overline{BDF}\right)}$$

Le bruit de fond moyen multiplié par le temps de comptage d'un échatillon (on peut supposer les mêmes temps T_{BDF} et T_S) donne le taux de comptage du bruit de fond.

$$r_{BDF} = \frac{\overline{BDF}}{T_S}$$

$$\text{SD tauxdecomptage} = k_{1-\alpha} \times \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right) \times r_{BDF} \times T_S}}{T_S}$$

Soit

$$\text{SD tauxdecomptage} = k_{1-\alpha} \times \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right) \times r_{BDF}}}{\sqrt{T_S}}$$

Si on ajoute le rendement global de mesure on obteint alors le seuil de détection sur l'activité :

$$\text{SD activité} = k_{1-\alpha} \times \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right) \times r_{BDF}}}{R_{global} \times \sqrt{T_S}}$$

Exemple :

On utilise un compteur germanium pour mesurer l'activité d'une solution où l'on pense qu'il y peut y avoir du césium-137.
L'épaisseur de solution dans le flacon est de 2 cm. On néglige l'auto atténuation de la source.
Le rendement global de détection est de 10 %.

Le bruit de fond mesuré durant 3 heures est de 2040 impulsions.
Le temps de comptage alloué à l'échantillon sera de une heure.
Ce qui fait que le temps total alloué à l'opération est de 4 heures.

On considère que le risque α et le risque β sont les mêmes (valeur de 2;5 %)

1°) Déterminer le seuil de décison de cette mesure

Pour un intervalle de confiance de 95 % (α = 2,5%) $k_{1-\alpha} = 2$

$$n = \frac{T_{BDF}}{T_S} = 3$$

$$r_{BDF} = \frac{2040}{3 \times 3600} = 0{,}1889$$

T_S = 3600 s

Soit

$$\text{SD activité} = 2 \times \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right) \times 0{,}1889}}{0{,}1 \times \sqrt{3600}} = 0{,}1673 \text{ Bq}$$

Si on prend des temps de compatge égaux entre bruit de fond et échantillon on obtient :

$$\text{SD activité} = 2 \times \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right) \times 0{,}1889}}{0{,}1 \times \sqrt{7200}} = 0{,}1254 \text{ Bq}$$

Si on prend un risque α = ,5% on a $k_{1-\alpha}$ = 1,65
SD activité = 0,1035 Bq

Si on fait baisser le taux de comptage du bruit de fond en mettant des protections autour du compteur (ce qui a un coût) on améliore encore le seuil de décision.
Prenont le cas où l'on diminue le taux de comptage de 20 %

r_{BDF} = 0,1511 soit un nombre d'impulsions de 1632 en 3 heures

$$\text{SD activité} = 1{,}65 \times \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right) \times 0{,}1511}}{0{,}1 \times \sqrt{7200}} = 0{,}0926 \text{ Bq}$$

Enfin si on améliore le rendement global du détecteur (ce qui devient encore plus cher) en passant de 10 à 20 % on obtient :
SD activité = 0,0462 Bq

Ce qui représente une amélioration de 75 %.

3.7. Cumul sur les comptages

Considérons n mesures d'un échantillon effectuées durant des temps individuels équivalents (toutes choses égales par ailleurs).

A chaque mesure est associée un comptage brut et un bruit de fond :

N_{BRUT}
N_{BDF}
Pendant le temps Ti

Pour chaque mesure on peut déterminer la valeur du comptage net

$N_{NET} = N_{BRUT} - N_{BDF}$ et l'incertitude associée : $\varepsilon_{Nnet} = k \sqrt{N_{BRUT} + N_{BDF}}$

Le seuil de décision étant égal à : $SD = k_{1-\alpha} \times \sqrt{2\,(N_{BDF} + 1)}$

L'ensemble de ces comptages est alors équivalent à un comptage unique de durée T

$$T = \sum_i Ti$$

Avec

$$N_{BRUT}\ \text{total} = \sum_i N_{BRUT}$$

$$N_{BDF}\ \text{total} = \sum_i N_{BDF}$$

On en déduit un comptage net cumulé :

$$N_{NET}\ \text{total} = \sum_i N_{BRUT} - \sum_i N_{BDF} = \sum_i N_{NET}$$

Une incertitude associée

$\varepsilon_{Nnet} = k \sqrt{\sum_i N_{BRUT} + \sum_i N_{BDF}}$

Un seuil de décision cumulé

SD total = $k_{1-\alpha} \times \sqrt{2\,(\sum_i N_{BDF} + 1)} = \sqrt{\sum_i (SD_i)^2}$

Bien que le seuil de décision cumulé soit évidemment plus grand que chaque seuil de décision individuel, le cumul des comptages représente un gain sur le plan statistique.
On constate que les seuils de décision se cumulent quadratiquement et pas linéairement.
On peut alors dire que :

SD total = $\sqrt{\sum_i (SD_i)^2} < \sum_i SD_i$

Exemple :
Un échantillon a été mesuré 10 fois durant 60 secondes. Chaque mesure de l'échantillon a été accompagnée d'une mesure de bruit de fond durant le même temps.
Le rendement global de détection est de 24 %.

Déterminer par cumul l'activité de l'échantillon, l'incertitude associée, et le seuil de décision pour un risque alpha égal à 2,5 %.

BRUT	BDF
1047	905
1027	928
1008	947
996	892
1017	875
1076	939
1084	924
1062	981
1034	910
1023	961

N_{BRUT} total = $\sum_i N_{BRUT}$ = 10374

N_{BDF} total = $\sum_i N_{BDF}$ = 9262

N_{NET} total = 10374 – 9262 = 1112 impulsions
Temps de comptage : 60 x 10 secondes = 600

Taux de comptage = 1112 / 600 = 1,853 impulsions/seconde

Activité échantillon = 1,853 / 0,24 = 7,72 Bq

$\varepsilon_{Nnet} = 2\sqrt{10374 + 9262} = 280$ impulsions
$\varepsilon_{taux\ comptage}$ = 0,467 impulsions/seconde
$\varepsilon_{activité}$ = 1,946 Bq

A = 7,72 ± 1,95 Bq

SD total = 2 x $\sqrt{2\,(9262+1)}$ = 272 (la somme des seuils étant égale à 861)
SD taux comptage = 0,453 impulsions/seconde
SD activité = 1,89 Bq

Le taux de comptage moyen du bruit de fond est d'environ 15,43 impulsions par secondes.

Ce qui fait que le seuil de décision est atteint sur le compteur à partir d'un taux de comptage de : 15,43 + 0,467 = 15,90

On va donc que l'échantillon présente un taux de compatge moyen de :
15,43 + 1,853 = 17,28
Cette valeur est supérieure au seuil de décision.R = 1,853/0,467 environ égal à 4.

Si les risques α et β sont les mêmes, la LD est égale à :

LD activité = 3,78 Bq
LD taux comptage = 0,907 impulsions/seconde
LD total = 544

En prenant une valeur moyenne par rapport aux 10 échantillons cela donne 54 impulsions.

En prenant le bruit de fond moyen de 926 impulsions, on peut donc raisonnablement considérer qu'avec 926 + 54 = 980 impulsions il n'y a guère de doute et que pour 926 + 27 = 953 impulsions on a 5% de chance d'obtenir une valeur pour laquelle l'échantillon est un échantillon réellement non radioactif (et donc 95 % de chances qu'il le soit).