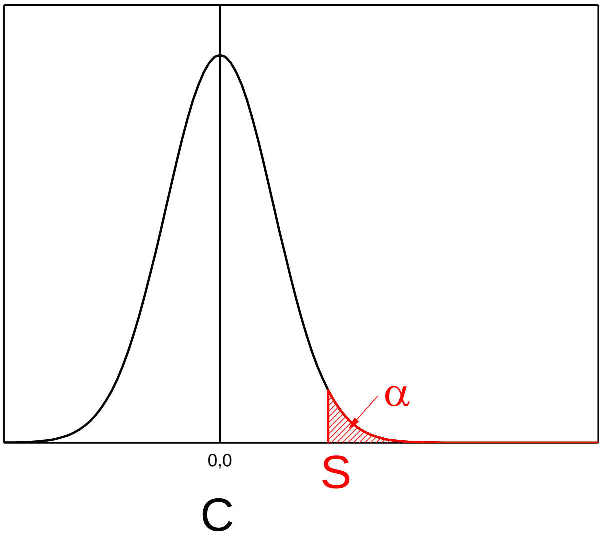
Seuil de décision

A partir de quel moment peut-on dire qu'un échantillon donne un signal différent d'un blanc ? Le but du seuil de décision est de répondre à cette question. Il est donné pour un risque α de dire qu'un échantillon donne un signal différent du bruit de fond alors qu'il ne l'est pas. Si on mesure un grand nombre d'échantillons non radioactifs, α% d'entre eux donneront un taux de comptage supérieur au seuil de décision S ou encore, on a α% de chance d'obtenir une valeur supérieure à S pour un échantillon réellement non radioactif. Plus on choisit α petit, plus on a de chance de trouver des échantillons radioactifs en dessous du seuil de décision et moins on aura de chance de trouver des échantillons non radioactifs en dessus du seuil de décision.

Si t_B est le temps de mesure du bruit de fond ; t, le temps de mesure de l'échantillon ; N_B, le nombre de coups enregistré pour le blanc et N le nombre de coups enregistré sur l'échantillon.

Le taux de comptage net est $C = \frac{N}{t} - \frac{N_B}{t_B}$



N et N_B sont des variables de Poisson. L'estimation de la variance est $s_c^2 = \left(\frac{s_N}{t}\right)^2 + \left(\frac{s_{N_B}}{t_B}\right)^2 = \frac{N}{t^2} + \frac{N_B}{t_B^2}$

Soit b le taux de comptage sur le blanc. Si s_{C0} est l'estimation de l'écart type quand l'échantillon est un blanc alors, $s_{C0}^2 = \frac{bt}{t^2} + \frac{bt_B}{t_B^2} = b\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_B}\right)$

$S = k_\alpha s_{C0} = k_\alpha \sqrt{b\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_B}\right)}$ *ou k_α est un facteur qui dépend de α*

Si on peut considérer que C suit une loi normale, alors :

Pour α=5%, k_α=1,645

Pour α=2,5%, k_α=1,96 (environ 2)

Plus généralement k_α est tel que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{k_\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \alpha$ *et peut être trouvé dans les tables statistique de la loi normale.*

Denis Murat

En général, on utilise α=2,5%, k_α ~ 2

$$\boxed{S = 2\sqrt{b\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_B}\right)}}$$

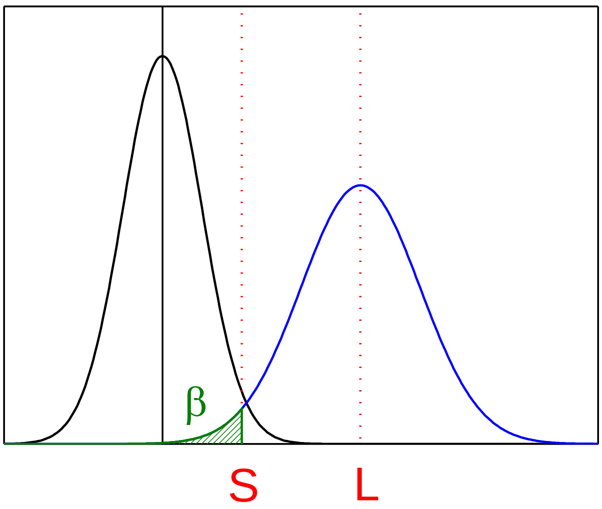
Lorsque C est supérieur à S, on peut donner le résultat avec un intervalle de confiance d'environ 95% sous la forme C±2s_C avec $s_c = \sqrt{\frac{N}{t^2} + \frac{N_B}{t_B^2}}$

Limite de détection

En dessus de quelle activité est t'on quasiment sûr d'avoir un taux de comptage net supérieur à S ? La limite de détection L est donnée avec un risque β d'observer un taux de comptage inférieur à S. Un échantillon dont le taux de comptage net vrai est la limite de détection L est tel que l'on a β% de chance d'avoir un comptage net inférieur à S. Selon cette définition, il s'agit plutôt d'une limite maximale de non détection et non pas une limite minimale de détection.

Soit s_{CL} l'estimation de l'écart type du taux de comptage net lorsque sa valeur vraie est égale à L.

$$L = S + k_\beta s_{CL}$$



k_β *est tel que* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{-k_\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \beta$ *et peut être trouvé dans les tables statistique de la loi normale.*

$$s_{CL}^2 = \frac{L+b}{t} + \frac{b}{t_B} = s_{C0}^2 + \frac{L}{t}$$

Ainsi, L est la solution de l'équation : $L = k_\alpha s_{C0} + k_\beta \sqrt{s_{C0}^2 + \frac{L}{t}}$

Denis Murat

$$L - k_\alpha s_{C0} = k_\beta \sqrt{s_{C0}^2 + \frac{L}{t}}$$

$$\left(L - k_\alpha s_{C0}\right)^2 = k_\beta^2 \left(s_{C0}^2 + \frac{L}{t} \right)$$

$$L^2 + k_\alpha^2 s_{C0}^2 - 2Lk_\alpha s_{C0} = k_\beta^2 s_{C0}^2 + k_\beta^2 \frac{L}{t}$$

$$L^2 - L\left(2k_\alpha s_{C0} + \frac{k_\beta^2}{t} \right) + \left(k_\alpha^2 - k_\beta^2\right) s_{C0}^2 = 0$$

Des deux racines de cette équation, une seule a une signification physique réelle :

$$\boxed{L = k_\alpha s_{C0} + \frac{k_\beta^2}{2t} + \frac{k_\beta}{2}\sqrt{\frac{k_\beta^2}{t^2} + \frac{4k_\alpha s_{C0}}{t} + 4s_{C0}^2}} \text{ avec } s_{C0} = \sqrt{b\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_B}\right)}$$

Si on choisit α=β=2,5% alors k_α=$k_\beta \sim 2$

$$L - 2s_{C0} = 2\sqrt{s_{C0}^2 + \frac{L}{t}}$$

$$\left(L - 2s_{C0}\right)^2 = 4\left(s_{C0}^2 + \frac{L}{t} \right)$$

$$L^2 + 4s_{C0}^2 - 4Ls_{C0} = 4\left(s_{C0}^2 + \frac{L}{t} \right)$$

$$L^2 - 4L\left(s_{C0} + \frac{1}{t} \right) = 0$$

$$\boxed{L = 4\left(s_{C0} + \frac{1}{t} \right) = 4\left(\sqrt{b\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_B}\right)} + \frac{1}{t} \right)}$$